

Representações de Grupos (Finitos) e a Correspondência de McKay

Guilherme da Costa Cruz
Orientador: Kostiantyn Iusenko

Instituto de Matemática e Estatística - USP

26 de Novembro de 2020

Eu quero sugerir que há uma imensa quantidade de conexões com outras áreas ainda por descobrir. Se eu estiver certo, eu prevejo novas provas da classificação [de grupos simples] que devem pouco ou nada às provas atuais. Elas serão mais curtas e nos ajudarão a entender os grupos finitos simples num contexto muito mais amplo do que teoria de grupos finitos.

John McKay, 1980

- ▶ A correspondência de McKay conecta cada subgrupo finito de $SU_2(\mathbb{C})$ a um grafo especial, os chamados diagramas de Dynkin.
- ▶ Pode ser feita de duas maneiras:
 - Estudando as representações de cada um dos subgrupos (McKay, 1980)
 - Analisando as singularidades no espaço de órbitas (DuVal, 1934)
- ▶ A apresentação será do seguinte modo:
 1. Exposição, de forma geral, da teoria de Representações de Grupos.
 2. Classificação dos subgrupos finitos de $SU_2(\mathbb{C})$.
 3. O 1º modo de obter a correspondência de McKay.
 4. O 2º modo, ou a chamada Resolução das Singularidades Kleinianas.

Representações de Grupos Finitos: Definições [1]

Definição

Dado um grupo G , uma **representação (linear) de G** é um espaço vetorial V , sobre um corpo $\mathbb{K}$, munido de um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, isto é:

$$\forall g, h \in G \quad \rho(gh) = \rho(g)\rho(h), \quad \rho(1) = Id, \quad \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}.$$

Definição

Dizemos que V é **irredutível** se V não possui uma subrepresentação própria não nula, ou seja, se suas únicas subrepresentações são as triviais, V e $\{0\}$.

Teorema (Maschke)

Se G é um grupo finito e $\mathbb{K}$ é um corpo tal que $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Então, toda representação de G (de dimensão finita) pode ser decomposta como uma soma direta de representações irredutíveis.

Representações de Grupos Finitos: Caracteres

Definição

Seja $\rho: G \rightarrow GL(V)$ uma representação do grupo G (sobre $\mathbb{C}$), onde V tem dimensão finita. Chamamos a função seguinte de *caracter da representação V* :

$$\begin{aligned}\chi_V: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{Tr}(\rho(g))\end{aligned}$$

Teorema

Duas representações de um grupo finito são isomorfas se, e somente se, seus caracteres são iguais.

Teorema

O número de representações irredutíveis não-isomorfas de um grupo é igual à quantidade k de suas classes de conjugação. Além disso, denotando suas dimensões por $n_1, \dots, n_k$, vale que

$$|G| = n_1^2 + \dots + n_k^2.$$

Teorema (Burnside, 1904)

Todo grupo de ordem $p^a q^b$, onde p e q são primos e $a, b \in \mathbb{N}$, é solúvel.

Subgrupos Finitos de $SU_2(\mathbb{C})$ [2]

A classificação se baseia no homomorfismo de grupos:

$$\phi: SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$$

- ▶ ϕ é 2:1, isto é, ϕ é sobrejetor e $\ker(\phi) = \{\pm Id\}$
- ▶ Pode ser obtido, algebricamente, utilizando os quatérnios.
- ▶ " $SU_2(\mathbb{C})$ são as rotações da reta projetiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ "

Subgrupos Finitos de $SO_3(\mathbb{R})$

Os subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$, isto é, os grupos de rotação de $\mathbb{R}^3$ finitos, são de 5 tipos:

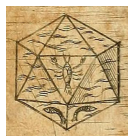
1. cíclicos C_n : rotações de uma pirâmide com base regular.
2. diedrais D_n : rotações de um diedro (ou hosoedro).
3. 4-alternado A_4 : rotações de um tetraedro.
4. 4-simétrico S_4 : rotações de um cubo (ou octaedro).
5. 5-alternado A_5 : rotações de um icosaedro (ou dodecaedro).



Subgrupos Finitos de $SU_2(\mathbb{C})$

Prova-se que os subgrupos finitos de $SU_2(\mathbb{C})$ são pré-imagem de algum grupo de rotação ou são cíclicos. Ou seja, são os seguintes:

1. os grupos cíclicos C_n , de ordem n .
2. os grupos diedrais binários $D_n^* := \phi^{-1}[D_n]$, de ordem $4n$.
3. o grupo tetraédrico binário $\mathcal{T}^* := \phi^{-1}[A_4]$, de ordem 24.
4. o grupo octaédrico binário $\mathcal{O}^* := \phi^{-1}[S_4]$, de ordem 48.
5. o grupo icosaédrico binário $\mathcal{I}^* := \phi^{-1}[A_5]$, de ordem 120.



Correspondência de McKay [3]

Como obter um grafo a partir das representações dos subgrupos $\Gamma \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$?

- ▶ Ache todas as representações irredutíveis de Γ : $\{\rho_0, \dots, \rho_r\}$.
- ▶ Repare que a inclusão nos dá uma representação injetora:
 $\rho: \Gamma \hookrightarrow \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
- ▶ $\rho_i \otimes \rho$ também é uma representação de Γ e, pelo Teorema de Maschke, escreva:

$$\rho_i \otimes \rho = a_{i0}\rho_0 \oplus \dots \oplus a_{ir}\rho_r, \text{ onde } a_{ij} \in \mathbb{N}$$

- ▶ Desenhe o grafo cujos vértices são as representações ρ_i e tal que a_{ij} é o número de arestas (direcionadas) de ρ_i para ρ_j .

Correspondência de McKay (caso cíclico)

Seja $\rho: C_n \hookrightarrow \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a representação-inclusão. No caso do grupo cíclico, há n representações irredutíveis que satisfazem:

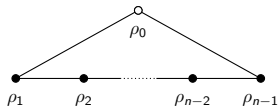
$$\rho_0 \otimes \rho = \rho_1 \oplus \rho_{n-1}$$

$$\rho_1 \otimes \rho = \rho_0 \oplus \rho_2$$

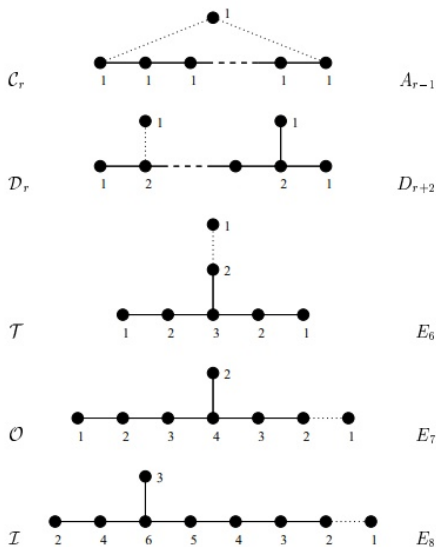
$$\vdots$$

$$\rho_{n-1} \otimes \rho = \rho_0 \oplus \rho_{n-2}$$

Com isso, obtemos o diagrama de Dynkin estendido $\widetilde{A}_{n-1}$:



A Correspondência de McKay



As Singularidades Kleinianas [4]

Teorema

A álgebra dos polinômios Γ -invariantes, $\mathbb{C}[x, y]^\Gamma$ é gerada por 3 polinômios X, Y, Z e que satisfazem uma relação $R(X, Y, Z)$, que foi especificada na tabela abaixo.

$\Gamma \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$	$R(X, Y, Z)$
C_n	$X^n + YZ$
D_n^*	$X^{n+1} + XY^2 + Z^2$
T^*	$X^4 + Y^3 + Z^2$
O^*	$X^3Y + Y^3 + Z^2$
I^*	$X^5 + Y^3 + Z^2$

Proposição

Para cada Γ , o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ que satisfazem a relação $R(x, y, z) = 0$ está em bijeção com o espaço das órbitas $\mathbb{C}^2/\Gamma$. Além disso, o ponto $0 \in \mathbb{C}^2/\Gamma$ é sua única singularidade.

Singularidades Kleinianas e Resolução

Definição

Uma *resolução da singularidade* (V, v) é uma variedade $\tilde{V}$ munida com um morfismo $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ que satisfazem:

1. o conjunto $\tilde{V} \setminus \sigma^{-1}\{v\}$ é denso em $\tilde{V}$.
2. a restrição de σ é um isomorfismo entre $\tilde{V} \setminus \sigma^{-1}\{v\}$ e $V \setminus \{v\}$
3. todo ponto de $\tilde{V}$ é regular.

Além disso, $\sigma^{-1}\{v\}$ é chamado de *conjunto excepcional de $\tilde{V}$*

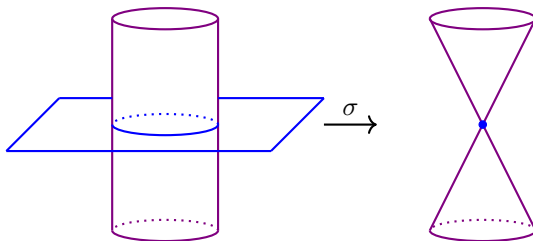


Figura 1: Resolução da singularidade cíclica $\mathbb{C}^2/C_2$.

Resolução das Singularidades Cíclicas

Teorema

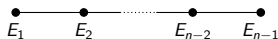
A variedade $\tilde{V}$ que nos fornece uma resolução da singularidade $(\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$, quando $\Gamma = C_n \subset SU_2(\mathbb{C})$, é dada por n cópias de $\mathbb{C}^2$:

$$\tilde{V} = \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \dots \cup \mathbb{C}_{(n)}^2.$$

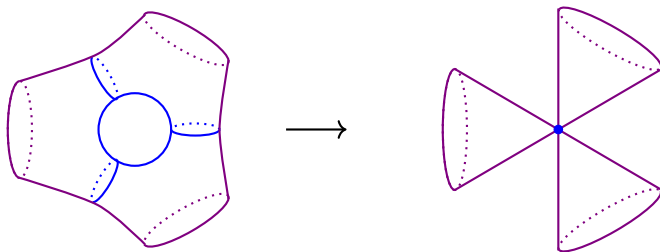
A resolução $\sigma: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ satisfaz que:

$$\sigma^{-1}(0) = E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}, \quad E_i \cong \mathbb{P}^1,$$

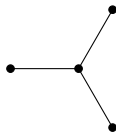
satisfazendo que E_{i-1} e E_i se intersectam em um ponto e que $E_i \cap E_j = \emptyset$ quando $|i - j| > 1$.



Resolução da Singularidade de $\mathbb{C}^2/D_2^*$: Visualização



- Um vértice para cada círculo e uma aresta para cada interseção entre eles: obtemos o diagrama de Dynkin D_4 :



Extensões e Conclusões

- Podemos pensar nos diagramas de Dynkin homogêneos à luz de diferentes teorias:

Teoria	Vértices	Arestas entre i e j
Álgebras de Lie	raízes simples	$(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$
Representações de grupos	representações irredutíveis	ρ_j faz parte da decomposição de $\rho_i \otimes \rho$
Resolução de singularidades	componentes $E_i \cong \mathbb{P}^1$	$E_i \cap E_j \neq \emptyset$

Tabela 1: A classificação ADE.

- Extensões da teoria:
 - P. Slodowy estende para os outros diagramas de Dynkin.
 - A. Mellit faz uma extensão para álgebras não-comutativas.

Conclusão

The greatest illusion of this world is the illusion of separation. Things you think are separate and different are actually one and the same.

Guru Pathik (Avatar: The Last Airbender S02E19)

Conclusão

The greatest illusion of this world is the illusion of separation. Things you think are separate and different are actually one and the same.
Guru Pathik (Avatar: The Last Airbender S02E19)



Obrigado!

O trabalho escrito pode ser acessado em
https://www.researchgate.net/publication/346548604_Representacoes_de_Grupos_e_a_Correspondencia_de_McKay

- [1] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, first. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [2] J. v. Hoboken, “Platonic solids, binary polyhedral groups, Kleinian singularities and Lie algebras of type A, D, E.,” tese de mestrado, University of Amsterdam, 2002.
- [3] J. McKay, “Graphs singularities and finite groups,” *AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 37, pp. 183–186, 1980.
- [4] K. Lamotke, *Regular Solids and Isolated Singularities*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1986.